EQUAÇÕES DO 2.º GRAU

Entre os vários tipos de equações, encontram-se as equações do 2.º grau com uma incógnita, com as quais já tomámos contacto no 8.º ano, mas, apenas em algumas das formas que estas equações podem tomar.

O que se pretende neste capítulo é estudar a resolução de qualquer tipo de equações do 2.º grau com uma incógnita, escolhendo a maneira ***mais adequada*** de o fazer.

Temos assim uma equação e neste caso, mais exactamente, uma equação do 2.º grau, já que <u>*o maior expoente da incógnita é 2.*</u>

Chamamos equação do 2.º grau com uma incógnita a toda a expressão que se possa escrever na forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad com \quad a \neq 0$$

À forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ **chamamos <u>forma canónica</u>.**

Uma equação está escrita na forma canónica quando:

- o 1.º membro é um polinómio reduzido;
- o 2.º membro é zero.

Nota:

A maioria das equações do 2.º grau não estão escritas na forma canónica, temos que as colocar utilizando as regras de resolução de equações (parênteses, denominadores,…)

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad com \quad a \neq 0$$

Quando a equação está escrita na forma canónica, dizemos que:

ax^2 é o termo de grau 2 e <u>**a**</u> o seu coeficiente

bx é o termo em x (de grau 1) e <u>**b**</u> o seu coeficiente

c é o termo independente (de grau zero)

Assim, e voltando ao nosso problema, temos que $x^2 + 30x - 2800 = 0$

é uma equação do 2.º grau, em que:

- ☞ a= 1 coeficiente do termo de grau 2 ou do 2.° grau;
- ☞ b=30, coeficiente do termo de grau 1;
- ☞ c=-2800, coeficiente do termo de grau zero ou termo independente.

Exemplos:

$\mathbf{x^2 - 5x + 6 = 0}$, onde **a** = 1, **b** = -5 e **c** = 6.

$-\mathbf{x^2 - 36 = 0}$, onde **a** = -1, **b** = 0 e **c** = -36.

$\mathbf{7x^2 - x = 0}$, onde **a** = 7, **b** = -1 e **c** = 0.

A equação que dá resposta ao nosso problema $x^2 + 30x - 2800 = 0$

diz-se completa, porque tem os 3 termos (2.º, 1.º e grau 0).

Uma equação do 2º grau é **completa** quando **b** e **c** são diferentes de zero (porque para ser do segundo grau o valor de **a** tem de ser sempre diferente de zero).

Uma equação do 2º grau é ***incompleta*** quando **b** ou **c** é igual a zero, ou ainda, quando ambos são iguais a zero.

Equações da forma $ax^2 + bx = 0$, ($c = 0$)

$x^2 - 3x = 0$, onde $a = 1$, $b = -3$.

$-2x^2 + 4x = 0$, onde $a = -2$, $b = 4$.

Equações do tipo $ax^2 + c = 0$, ($b = 0$)

$3x^2 - 2 = 0$, onde $a = 3$, $c = -2$.

$x^2 + 5 = 0$, onde $a = 1$, $c = 5$.

Equações do tipo $ax^2 = 0$, ($b=c=0$)

$-2x^2 = 0$, onde $a = -2$

RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Resolver uma equação do 2º grau significa determinar as suas **raízes** ou **soluções**.

***Raiz* ou *solução* é o número real que, ao substituir a incógnita de uma equação, a transforma numa proposição verdadeira.**

O conjunto formado pelas raízes de uma equação denomina-se **conjunto-solução**.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES INCOMPLETAS

Equações incompletas do tipo $ax^2 = 0, \quad b = c = 0$

$$ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{0}{a} \Leftrightarrow x = 0$$

De uma forma geral a solução deste tipo de equações é zero.

Exemplos:

$$-8x^2 = 0$$

$$-\frac{2}{3}x^2 = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 = 0{,}25x^2$$

Equações incompletas do tipo $ax^2 + c = 0, \quad b = 0$

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Equações da forma: $ax^2 + c = 0$, ($b = 0$)

No geral, a equação do tipo $ax^2 + c = 0$:

- possui **duas raízes reais simétricas** se:
  - c/a for um **nº positivo.**
- **Zero, se –c/a=0**

Equação possível

- **não possui raiz real** se:
  - c/a for um **nº negativo.**

Equação impossível

$$ax^2 + c = 0, \quad b = 0$$

Exemplos:

$$-2x^2 + 14 = 0$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$-2x^2 - 10 = 0$$

Se $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{x^2} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{y}}$ ou $\mathbf{x} = -\sqrt{\mathbf{y}}$

Equações incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0, \quad c = 0$

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

Equações da forma: $ax^2 + bx = 0$, $(c = 0)$

A equação do tipo $ax^2 + bx = 0$ tem como soluções:

$$\mathbf{x = 0}$$

e

$$\mathbf{x = -b/a}$$

$$ax^2 + bx = 0, \quad c = 0$$

Exemplos:

$$7x^2 - 28x = 0$$

$$x^2 = 3x$$

$$\frac{(x+1)^2}{5} = \frac{x+2}{10}$$

Primeiro: Forma canónica;
Segundo: Factorização do polinómio;
Terceiro: LAP

$x^2 = 3x \Leftrightarrow$ Re*duzir a equação à forma canónica*

$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow$ *Factorizar o polinómio*

$\Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow$ *Lei do anulamento do produto*

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

$S = \{0, 3\}$

$$\frac{(x+1)^2}{5} = \frac{x+2}{10} \Leftrightarrow \textit{Tirar os parênteses}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1}{\underset{(\times 2)}{5}} = \frac{x+2}{10} \Leftrightarrow \quad \textit{Tirar os denominadores}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow \textit{Colocar na forma canónica}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x = 0 \quad \textit{E agora já sabem resolver.}$$

$$S = \left\{0, -\frac{3}{2}\right\}$$

Equações de 2.º grau completas

Denomina-se equação do 2º grau, na incógnita **x**, toda equação da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \; ; \quad a \neq 0.$$

Uma equação do 2º grau é **completa quando b e c são diferentes de zero.**

Observa que:

a representa o coeficiente de x^2;
b representa o coeficiente de x;
c representa o termo independente.

Reparem que nas eq. completas b e c são diferentes de zero.

Exemplos:

$x^2 - 5x + 6 = 0$, onde a = 1, b = -5 e c = 6.

$7x^2 - x - 10 = 0$, onde a = 7, b = -1 e c =-10.

$x^2 - 36 = 0$, onde a = 1, b = 0 e c = -36. → ***Incompleta***

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COMPLETAS FÓRMULA DE BHASKARA

Para solucionar **equações completas do 2° grau** utilizaremos a **Fórmula de Bhaskara**.

A partir da equação $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, $a \neq 0$, desenvolveremos passo a passo a dedução da **Fórmula de Bhaskara**.

1° passo: multiplicaremos ambos os membros por **4a.**

$$(4a).(ax^2 + bx + c) = 0.(4a)$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

2° passo: passar **4ac** para o 2° membro.

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

FÓRMULA DE BHASKARA

3º passo: adicionar **b²** aos dois membros.

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

4º passo: factorizar o 1º membro.

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

5º passo: extrair a raiz quadrada dos dois membros.

$$\sqrt{(2ax+b)^2} = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

6º passo: passar **b** para o 2º membro.

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

FÓRMULA DE BHASKARA

7º passo: dividir os dois membros por **2a**.

$$\frac{2ax}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Assim, a fórmula resolvente da equação do 2º grau:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\vee x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Fórmula resolvente das equações do 2.º grau

$$ax^2+bx+c=0 \quad (com\ a\neq 0) \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Em que:

a é o coeficiente do **termo de grau 2**.

b é o coeficiente do **termo de grau 1**.

c é o coeficiente do **termo independente**.

Nota: Só se pode aplicar a fórmula resolvente quanto uma equação do 2.º grau está na forma canónica.

Exemplo:

$$2x^2 - 2x = 12 \Leftrightarrow$$

1.º Colocar a equação na forma canónica (não está na forma canónica porque o 2.º membro não é zero)

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow \text{Identificam-se os coeficientes dos termos da equação e aplica-se a fórmula resolvente.}$$

$$a = 2 \qquad b = -2 \qquad c = -12$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 2 \times (-12)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2 + 10}{4} \vee x = \frac{2 - 10}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2 \qquad CS = \{-2, 3\}$$

Equações do 2.º grau em que o 1.º membro é o desenvolvimento do quadrado de um binómio

Se conseguirmos identificar estes casos, não precisamos de aplicar a fórmula resolvente. Repara:

$$4x^2 + 24x + 36 = 0$$

$Observa\, o\, 1.º\, membro\, da\, equação:$

$4x^2\ é\ o\ quadrado\, de\ 2x$

$36\ é\ o\ quadrado\, de\ 6$

$24x = 2 \times 2x \times 6\ é\ o\ dobro\, de\ 2x\ por\ 6$

$Logo,$

$$4x^2 + 24x + 36 = 0 \Leftrightarrow (2x+6)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 6 = 0 \vee 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = -6 \ \vee \ 2x = -6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -3$$

$$S = \{-3\}$$

Surgiram duas soluções (ou raízes) iguais. Diz-se que -3 é uma **solução ou raiz dupla**.

Equações em que o 1.º membro não é o desenvolvimento do quadrado de um binómio, como no primeiro caso que resolvemos, encontram-se as raízes, aplicando a fórmula resolvente.

Nota:
É possível resolver sempre qualquer equação do 2.º grau , completa ou incompleta , pela fórmula resolvente.

$$4x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = 4$$

$$b = 0$$

$$c = -7$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \times 4 \times (-7)}}{2 \times 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pm\sqrt{112}}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{112}}{8} \vee x = -\frac{\sqrt{112}}{8}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Muito Importante:

Ao resolver uma equação do 2.º grau,

deve-se procurar sempre utilizar o processo mais simples:

- ⋆**Definição de raiz quadrada.**
- ⋆**Lei do anulamento do produto.**
- ⋆ **Fórmula resolvente.**

NÚMERO DE SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO DO 2.º GRAU

Resolve, utilizando a fórmula resolvente, cada uma das seguintes equações.

$$2x^2 - 15x + 7 = 0$$

$$2x^2 - 15x + 7 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 56}}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{169}}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{15 + 13}{4} \vee x = \frac{15 - 13}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 7 \vee x = \tfrac{1}{2}$$
$$S = \left\{ \frac{1}{2}, 7 \right\}$$

A equação tem duas raízes diferentes.

$$-4x^2 + 12x - 9 = 0$$

$$-4x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{-8} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{-8} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-12 + 0}{-8} \vee x = \frac{-12 - 0}{-8} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = \frac{3}{2}$$
$$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

A equação tem uma raiz dupla ou duas raízes iguais.

$$-13x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$-13x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 52}}{-26} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{-27}}{-26}$$

Como não há nenhum número real que elevado ao quadrado dê um número negativo, a expressão **não tem significado em R.**

A equação não tem solução. É impossível em R . S={ }

Uma equação do 2.º grau pode portanto, ter 2 soluções diferentes, 1 solução (ou duas soluções iguais) ou não ter soluções.

Sem resolver a equação, como podemos saber o número de raízes?

Observando a resolução destas equações podemos verificar que o número de soluções depende do **cálculo da raiz.**

Se pensarmos que na fórmula resolvente, $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, verificamos

que a expressão que determina o número de raízes de uma equação, é:

$$b^2 - 4ac$$

À expressão $b^2 - 4ac$ chama-se BINÓMIO DISCRIMINANTE por discriminar o número de soluções de uma equação do 2.º grau.

Representa-se por Δ (letra grega que se lê delta).

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Podemos agora, escrever a Fórmula de Bhaskara, da seguinte forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

De acordo com o binómio discriminnte, temos três casos a considerar:

1° Caso: Se $\Delta > 0$, a equação tem duas soluções diferentes.

2° Caso: Se $\Delta = 0$, a equação duas soluções iguais, (raiz dupla).

3° Caso: Se $\Delta < 0$, a equação não tem raízes. Equação impossível em R.

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
O valor de $\sqrt{\Delta}$ é real e a equação tem **duas raízes reais diferentes**, assim representadas:	O valor de $\sqrt{\Delta}$ é nulo e a equação tem **duas raízes reais e iguais (solução dupla)**, assim representadas:	O valor de $\sqrt{\Delta}$ não existe em **IR**, não existindo, portanto, raízes reais.
$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\vee$ $x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = x' = -\frac{b}{2a}$	**Em R a equação é impossível S=$\varnothing$** As raízes da equação são **número complexos**.